

Leçon 204 : Connexité. Exemples d'Appls.

[Ber] : *Équations différentielles*, Florent Berthelin[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon[Que] : *Topologie*, Hervé Queffélec[Ser] : *Matrices, theory and applications*, Jean-Pierre Serre[Ska] : *Topologie et analyse*, Georges Skandalis[Tau] : *Analyse complexe*, Patrice Tauvel

I Notion de connexité [Gou] [Que] [Ska]

 (X, d) un espace métrique.| **Déf 1 (Connexité)** : X est connexe si ses seules**Rem 2** : De manière équivalente, X est connexe ssi il n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides ssi il n'est pas réunion de deux fermés disjoints non vides.| **Ex 3** : Un ensemble fini de points du plan est connexe si et seulement si il n'y en a qu'un. $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.| **Ex 4** : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.| **Thm 5** : L'image d'un connexe par une Appl continue est connexe.| **Ex 6** : $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas connexes.

App 7 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

| **Prop 8** : X est connexe ssi toute Appl continue de X dans un espace discret est constante.**App 9** : $\exp(2\pi g_1) = \exp(2\pi g_2) \implies g_1 - g_2 = cst \in \mathbb{Z}$ | **Prop 10** : Si $A \subset B \subset \bar{A} \subset X$ avec A connexe, alors B est connexe.| **Prop 11** : Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes tq $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

App 12 (Th de Darboux) :

II Notions connexes [Gou] [Ska] [Que]

| **Déf 13 (Connexité par arcs)** :| **Prop 14** : L'image d'un connexe par arcs par une Appl continue est connexe par arcs.| **Prop 15** : Connexe par arcs $\implies$ connexe.| **Ex 16** : $\Gamma = \left[\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times \mathbb{R}_+ \right] \cup \left[\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \{x\} \times \mathbb{R}_-^* \right]$ est connexe mais pas connexe par arcs. De même pour l'adhérence de $\{(x, \sin(\frac{1}{x})); x > 0\}$. [Annexe]| **Ex 17** : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs donc connexe. L'ensemble des matrices de rang r est connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.| **Ex 18** : Dans $\mathbb{R}^n$, la sphère euclidienne est connexe par arcs donc connexe. Il existe deux points diamétralement opposés sur Terre de températures identiques.| **Prop 19** : Dans un $\mathbb{K}$ -ev, un ouvert est connexe ssi il est connexe par arcs ssi il est connexe par sExments.| **Déf 20 (Convexité)** : Dans un $\mathbb{K}$ -ev où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ | **Déf 21 (Partie étoilée)** : [Annexe]| **Ex 22** : Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, l'ensemble des opérateurs normaux de $\mathcal{H}$ est connexe par arcs mais pas convexe. Il est cependant étoilé par rapport à 0.**Rem 23** : convexe $\implies$ étoilé $\implies$ connexe par sExments $\implies$ connexe par arcs

III Composantes connexes [Ska] [Que] [Ser] [Tau]

| **Prop 24** : La relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists C \subset X$ connexe, $x, y \in C$ est une relation d'équivalence.| **Déf 25 (Composante connexe)** : les orbites. On note $\mathcal{C}(x)$ la composante connexe de x .| **Prop 26** : $\mathcal{C}(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x . C'est le plus grand connexe contenant x .| **Ex 27** : Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n(\mathbb{R})^+$ et $GL_n(\mathbb{R})^-$.| **Prop 28** : Les composantes connexes de X sont fermées dans X .| **Ex 29** : Les composantes connexes ne sont pas ouvertes en général : les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons, qui ne sont pas ouverts dans $\mathbb{Q}$.| **Prop 30** : Si $X = \bigsqcup_{i \in I} \omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides, les ω_i sont les composantes connexes de X .

Prop 31 : Si V est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ avec I au plus dénombrable tq

$$V = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[.$$

Rem 32 : Sa mesure est alors $\sum_{i \in I} (b_i - a_i)$.

 **Dév 33 (Continuité des racines) :**

 **Dév 34 (Disques de Gershgorin) :**

Prop 35 :

1. Si X est connexe, une Appl localement constante sur X est constante.
2. Une Appl localement constante est constante sur les composantes connexes.

Ex 36 : Une fonction dérivable (resp. différentiable) sur un ouvert de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{R}^n$) de dérivée nulle (resp. différentielle nulle) est constante sur les composantes connexes.

App 37 (Indice) : L'indice est constant (entier) sur chaque composante connexe et nul sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$. [Annexe]

Ex 38 : Exemple d'indice (cercle ?).

IV Utilisations majeures de la connexité

IV.1 Équations différentielles [Ber] [Que]

Thm 39 (Cauchy-Lipschitz) : (global)

App 40 : Deux trajectoires différentes ne peuvent pas se croiser.

Ex 41 : $y' = \sin(y)$: les solutions restent dans des bandes [Annexe]

Thm 42 (Théorème des bouts) :

App 43 : Les solutions maximales à une EDOL sont globales (et plus généralement à une EDO tq $\|f(t, y)\| \leq a(t) + b(t)\|y\|$ avec a, b continues) (c'est Gronwall tq)

Thm 44 (Théorème de stabilité de Liapounov) :

IV.2 Quelques Appls en analyse complexe [Que] [Tau]

 **Dév 45 (Runge) :**

 **Dév 46 (Réciproque (contre-exemple)) :**

Prop 47 (Principe du maximum) :

Cor 48 (Principe du minimum) :

App 49 : Ex 4.3 Queffélec

Thm 50 (Principe des zéros isolés) :

Prop 51 (Principe du prolongement analytique) :

App 52 : Une fonctions holomorphe (non nulle) sur un compact possède un nombre fini de zéros. [Annexe]

Ex 53 : Prolongement analytique de la fonction Gamma.